

- Page 2 : Les difficultés des élèves révélées par les évaluations
- Page 7 : À la recherche d'une plus grande maîtrise des pratiques d'enseignement
- Page 17 : L'apprentissage des mathématiques n'est pas qu'une affaire de mathématiciens
- Page 25 : Bibliographie

# APPRENTISSAGE DES NOMBRES ET OPÉRATIONS : LES DONNÉES DU PROBLÈME

Dans le cadre scolaire, les mathématiques sont une discipline (ou matière) comme les autres, sauf que... « *dans nos sociétés, les mathématiques sont devenues un domaine fortement valorisé* » (Fayol, 2013) et un outil de sélection. Les mathématiques ont été élevées au rang de baromètre de la réussite scolaire et, dans les évaluations PISA, on s'inquiète du niveau moyen en mathématiques, et plus encore de l'augmentation du nombre d'élèves les « moins performants ».

PISA mesure les compétences des élèves à l'âge de 15 ans, ce qui représente, pour les élèves français, la quasi-fin de scolarité. Or, avant d'en arriver là, l'acquisition des connaissances et compétences mathématiques suppose une progression continue et raisonnée des apprentissages, une compréhension des difficultés et donc un enseignement adapté.

L'enfant, dès son plus jeune âge doit appréhender les quantités, comprendre comment elles peuvent être associées à des symboles. C'est une affaire de conceptualisation, pas aussi simple que la comptine enfantine pourrait le laisser penser. Comment passer d'une intuition des quantités à ce qu'on appelle des mathématiques, quel rôle peut jouer l'École et comment peut-elle mieux accompagner les élèves ?



Par Annie Feyfant

*Chargée d'étude et de recherche au service Veille et Analyses de l'Institut français de l'Éducation (IFÉ)*

Pour évaluer la situation, une conférence de consensus est organisée par le CNESCO et l'IFÉ, en novembre 2015, afin qu'un jury d'utilisateurs et d'acteurs de l'éducation auditionne des experts et publie les conclusions de ses travaux. Elle porte sur les premiers apprentissages, relatifs aux nombres et aux opérations. La question s'est posée d'utiliser le terme de numération, jugé finalement trop polysémique (représentation du nombre, comptage, dénombrement, énumération, etc.). Et les opérations dans tout ça ?

Ce *Dossier de veille* constitue un préambule à la revue de littérature scientifique internationale qui sera proposée au jury de cette conférence. Il pose en quelque sorte le contexte de la problématique. Dans un premier temps, nous présenterons les résultats de l'enseignement des mathématiques au primaire, d'après les évaluations externes, internationales ou nationales. Suivant le fil de l'enquête ayant accompagné l'une de

ces évaluations, nous nous intéresserons ensuite aux pratiques enseignantes et à la formation des enseignants, qui apparaissent en filigrane de ces évaluations, ce qui permettra de prendre un peu de recul pour aborder les apports et débats de la psychologie ou de la sociologie sur les apprentissages premiers en mathématiques.

## LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES RÉVÉLÉES PAR LES ÉVALUATIONS

On constate en France, une dégradation des performances des élèves en mathématiques, à la fin de l'enseignement obligatoire. Par ailleurs, si les évaluations nationales sont moins systématiques ces dernières années, les dernières montrent une grande hétérogénéité des résultats en fin de primaire et une augmentation des élèves en difficulté en fin de collège (évaluations CEDRE 2014) ●.

Peut-on, à la lecture (qui pourra paraître fastidieuse) des diverses évaluations tenter de comprendre pourquoi une plus forte proportion d'élèves serait aujourd'hui en (plus grande) difficulté face à l'apprentissage des mathématiques ? Qu'en est-il dans d'autres pays ?

### LES ÉLÈVES DU PRIMAIRE SOUS LA LOUPE DES ÉVALUATIONS NATIONALES

La direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) du ministère de l'Éducation nationale a réalisé une étude comparative quant aux résultats en mathématiques, à partir de batteries de tests administrées à l'identique en cours de CP (entre 1997 et 2011) et au début de CE2 (entre 1999 et 2013). Elle vient par ailleurs de publier les résultats de l'évaluation CEDRE 2014 ●.

### Des difficultés apparentes dès le CE2

Entre 1999 et 2013, le taux de réussite moyen en mathématiques passe de 64 % à 62 %, mais ce sont surtout les grandes disparités de résultats selon le type d'épreuves demandées qui retiennent l'attention. Les groupements d'items des évaluations (que l'on retrouve dans les évaluations internationales) sont les suivants : « connaître les nombres : transcrire des nombres écrits en chiffres et inversement », « comparer, ranger les nombres », « calcul » (mental, posé), « résolutions de problèmes numériques », « organisation et gestion de données dans un tableau », « reproduction de figures géométriques », « grandeurs et mesures ».

« En calcul, les résultats moyens sont stables, qu'il s'agisse du calcul mental ou du calcul posé. On note même une amélioration significative des performances sur les items de soustraction : ces items restent difficiles mais le taux de réussite moyen s'élève à 42 % en 2013, contre 35 % en 1999 ». « Les performances sont stables dans le domaine des grandeurs et mesures mais en recul en connaissance des nombres, résolution de problèmes numériques et géométrie » (Andreu et al., 2014).

À titre d'illustration, un des problèmes posés est le suivant :  
« La directrice de l'école a 87 lettres à envoyer. Elle doit mettre un timbre sur chaque lettre. Les timbres sont vendus par carnets de dix timbres. Combien de carnets doit-elle acheter ? » En 1999, 32 % des élèves de début de CE2 réussissaient cet exercice ; ils sont 18 % en 2013 (Andreu et al., 2014).

Les élèves sont en plus grande difficulté en 2013 qu'en 1999 (la baisse de performance est moins sensible pour les tests en français) : baisse de 2 points pour les élèves « à l'heure » contre une baisse de 8 points pour les élèves « en retard ».

« Le dispositif d'évaluation CEDRE permet de donner un état des lieux des acquis des élèves de fin d'école primaire (CM2) en mathématiques et de mesurer leur évolution entre 2008 et 2014. Chaque élève effectue un ensemble d'exercices (items), couvrant les différents champs mathématiques et permettant d'évaluer les compétences attendues en fin d'école primaire » (Dalibard & Pastor, 2015).

Pour les évaluations CEDRE 2014 en fin de collège, voir Arzoumanian & Dalibard (2015) ; pour les évaluations CEDRE 2014 en fin de primaire, voir Dalibard & Pastor (2015).

On note également une élévation du niveau en début de CP mais une légère baisse en début de CE2. Les auteurs du rapport expliquent ce paradoxe par le type de compétences évaluées en CP, « *en l'occurrence des compétences de "stock" : connaissance du code, des règles grapho-phonologiques, des nombres, etc.* » et celles qui viennent compléter ces premiers items, en CE2, « *telles que le niveau de vocabulaire, l'expression orale, les compétences calculatoires* » (DEPP, 2014).

### Les résultats inquiétants en fin d'école primaire

D'après l'enquête CEDRE 2014, environ 71 % des élèves de fin de CM2 maîtrisent les éléments suivants :

- nombres et calcul : écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, décimaux et quelques fractions simples, utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux, résoudre des problèmes relevant des quatre opérations ;
- géométrie : reconnaître, décrire et nommer les figures et solides usuels, utiliser la règle, l'équerre pour vérifier la nature des figures planes usuelles, percevoir et reconnaître parallèles et perpendiculaires ;
- grandeurs et mesure : connaître et utiliser les formules du périmètre et de l'aire d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle, utiliser les unités de mesures usuelles, résoudre des problèmes dont la résolution implique des conversions ;
- organisation et gestion de données : lire, interpréter tableaux et graphiques, résoudre un problème mettant en jeu une situation de proportionnalité.

Si le score moyen reste stable depuis les dernières évaluations CEDRE (2008), le pourcentage d'élèves en difficulté (16,3 %) a augmenté de plus d'un point. Dans ce groupe, on retrouve 46,2 % des élèves « en retard » et une forte proportion d'élèves fréquentant des écoles en éducation prioritaire (les élèves les plus performants restant stables dans ces

mêmes écoles). 42,4 % des élèves des groupes les plus faibles sont parfois en grande difficulté, un quart d'entre eux réussissent les items sous forme de QCM mais échouent sur ceux qui requièrent une certaine autonomie. Ils montrent plus de facilité face à des exercices proches des « pratiques scolaires ancrées » par rapport aux exercices faisant appel au raisonnement ou à l'application des connaissances (Dalibard & Pastor, 2015).

## UNE DÉGRADATION CONFIRMÉE PAR LES ÉVALUATIONS INTERNATIONALES

### Les performances des élèves à 15 ans

On connaît les évaluations PISA, qui mesurent les performances des élèves à l'âge de 15 ans. L'enquête PISA 2012, « *dont le domaine majeur d'évaluation est la culture mathématique, a évalué la capacité des jeunes âgés de 15 ans à se livrer à des raisonnements mathématiques et à utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes, et se comporter en citoyens constructifs, engagés et réfléchis, c'est-à-dire poser des jugements et prendre des décisions en toute connaissance de cause* » (OCDE, 2014b). Plusieurs pays d'Asie (ou des régions chinoises) se trouvent en tête de ce classement. Parmi les 10 premiers figurent également la Suisse, les Pays-Bas, le Liechtenstein. Pour rester en Europe, entre 15 % et 25 % des élèves sont très performants en Belgique, en Finlande, en Allemagne, au Liechtenstein, aux Pays-Bas, en Pologne et en Suisse. L'Italie, la Pologne et le Portugal sont remarquables par l'augmentation du nombre d'élèves très performants s'accompagnant d'une baisse des moins performants.

PISA 2012 analyse les compétences des élèves dans trois sous-domaines : « formuler des situations de façon mathématique » ●, « employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques » ●, « interpréter, appliquer et

« Pour utiliser leurs connaissances et compétences en mathématiques afin de résoudre un problème, les individus doivent souvent commencer par traduire le problème sous une forme qui se prête à un traitement mathématique » (OCDE, 2014b).

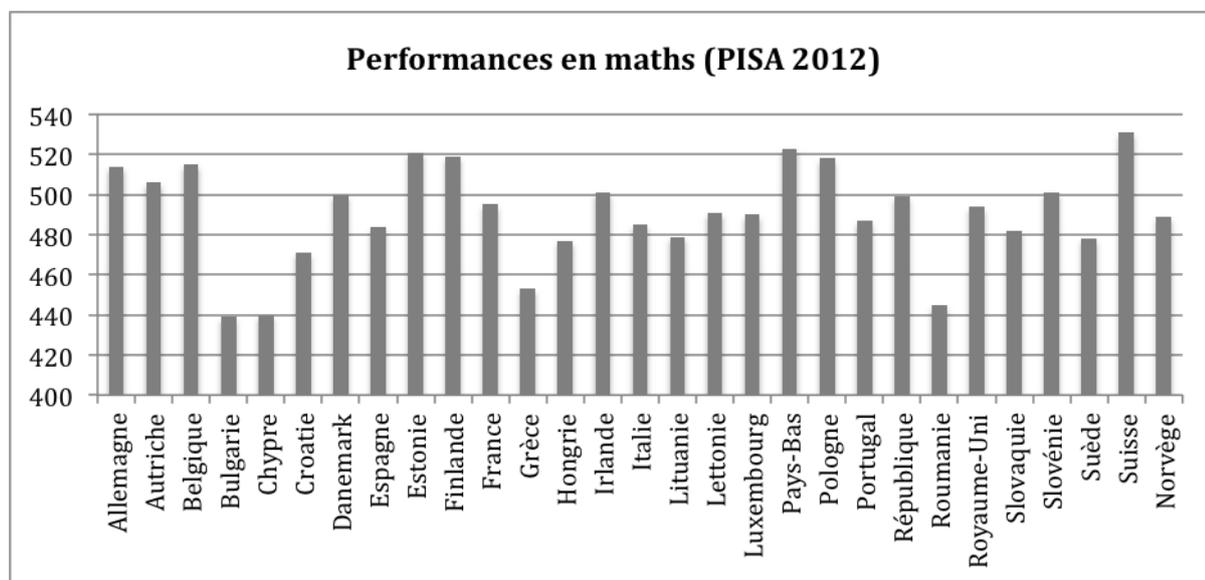
« Les élèves doivent reconnaître dans leur "boîte à outils" les éléments pertinents pour le problème tel qu'il est présenté ou qu'ils l'ont formulé, et appliquer ces connaissances d'une manière systématique et ordonnée dans leur cheminement vers la solution » (OCDE, 2014b).



évaluer des résultats mathématiques » ●. En Europe, les élèves français se situent en-deçà de la moyenne de l'OCDE pour la compétence « formuler » ; au-dessus de la moyenne pour la compétence « employer » et dans les 20 premiers pour « interpréter ». D'autres compétences ou « sous-compétences » sont évaluées

dans PISA, mais leur contenu s'éloigne trop des compétences attendues en fin de primaire pour qu'il soit intéressant d'y faire référence. Nous n'avons retenu ici que les grandes lignes de cette culture mathématique issue des premiers apprentissages mathématiques.

« Les élèves doivent établir des liens entre ces résultats et la situation dans laquelle ils s'inscrivent » (OCDE, 2014b).



Scores obtenus sur l'ensemble des items

Début 2012, un rapport de l'Inspection générale espérait que la tendance à la baisse des petits Français, depuis 2003, allait être enrayée avec les résultats de PISA 2012. Espoirs quelque peu déçus, puisque les scores moyens sont passés de 511 en 2003, 406 en 2006, 497 en 2009 et 495 en 2012 (Mégard, 2012).

### La situation au primaire

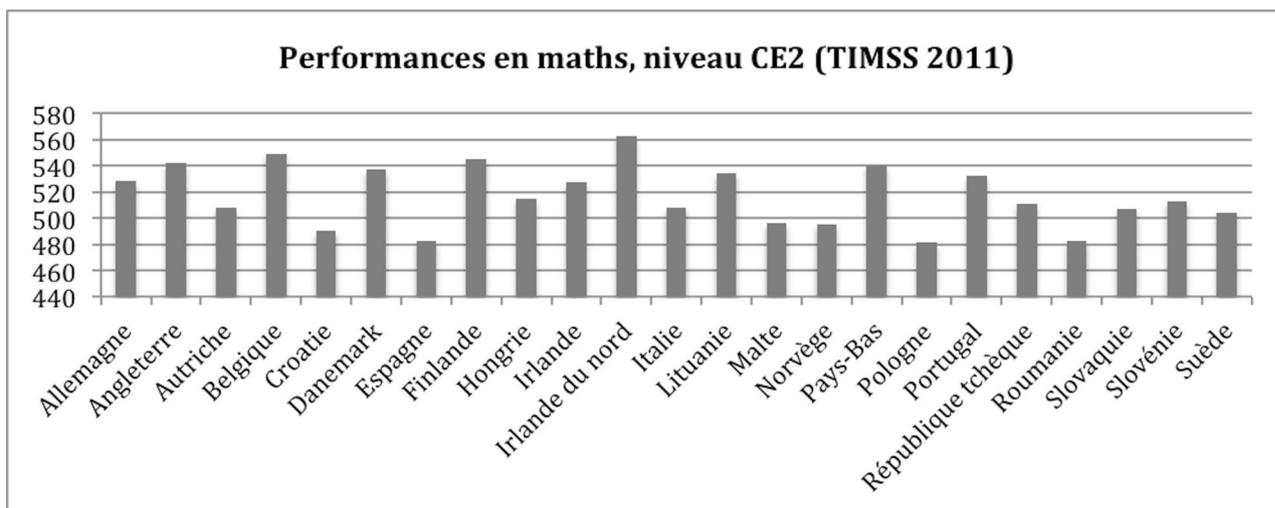
L'enquête [TIMSS](#) (« Trends in International Mathematics and Science Study ») évalue, tous les quatre ans, les performances en mathématiques et en sciences des élèves de quatrième année de l'enseignement élémentaire (CM1) et de la huitième année de scolarité obligatoire (4<sup>e</sup>, voir Mullis *et al.*, 2012). Il est nécessaire d'ajouter ici toutes les réserves nécessaires sur la pertinence de ce type d'évaluation, les élèves n'étant pas tous égaux face à ce type de test, mais on l'utilisera ici dans les grandes lignes et pour des éléments connexes à l'enquête. La France n'a, hélas, pas participé à cette enquête.

De la dernière édition (TIMSS 2011), retenons que les quatre pays (ou entités) d'Europe ● dont les élèves ont la meilleure performance en mathématiques, à la fin de la quatrième année de l'enseignement élémentaire, sont l'Irlande du Nord, la communauté flamande de Belgique, la Finlande et l'Angleterre. À la fin de la 8<sup>e</sup> année, on note un certain recul des pays européens dans le classement global, avec une triplète de tête composée de la Finlande, de l'Angleterre et de la Hongrie, légèrement au-dessus du score moyen.

### Les performances globales en mathématiques

Comme pour PISA, l'enquête TIMSS montre une légère baisse de performance, dans certains pays, depuis la dernière évaluation. C'est le cas de la Finlande, des Pays-Bas, ou de six autres pays européens. Dans d'autres pays elle a augmenté assez significativement (Portugal, Italie, Pologne, Allemagne, Grèce). L'évolution des performances depuis 1995 montre les mêmes tendances (pour les pays ayant participé régulièrement).

● Nous avons retenu ici les pays de l'Union européenne ayant répondu à l'enquête, ainsi que la Norvège (qui permettait d'avoir une vision sur l'ensemble de la Scandinavie, souvent mise en avant en matière d'éducation) et la Suisse.



Scores obtenus sur l'ensemble des items

#### Les compétences des élèves selon TIMSS 2011

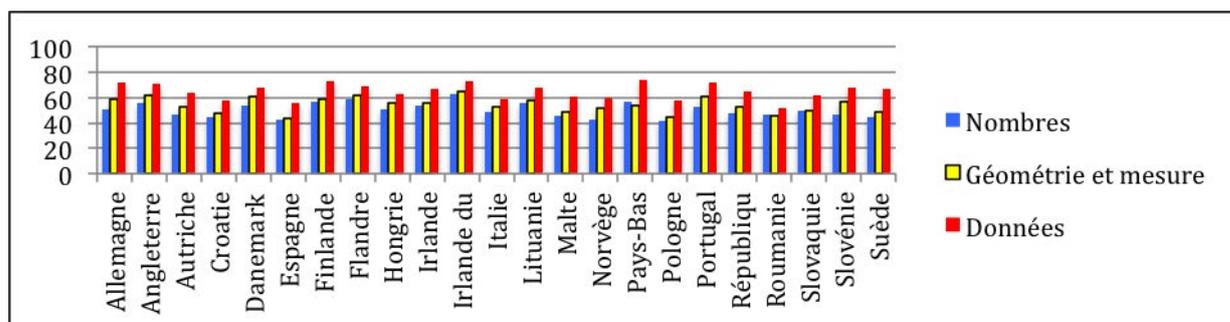
« Pour obtenir un score maximum en quatrième année de scolarité obligatoire, en l'occurrence un score de 625, l'élève peut appliquer sa compréhension et ses connaissances dans une variété de situations relativement complexes et expliquer son raisonnement. Il peut résoudre une variété de problèmes comportant un énoncé à plusieurs étapes portant sur les nombres entiers, y compris les proportions. À ce niveau, l'élève montre une compréhension croissante des fractions et des décimaux. Il peut appliquer ses connaissances géométriques portant sur un ensemble de figures à deux et trois dimensions, dans diverses situations. Il peut effectuer des déductions à partir de données dans un tableau et justifier ces conclusions » (Mullis et al., 2013). (Pour

mémoire, le meilleur score, atteint par les élèves de Singapour est de 606. Le meilleur score européen est de 562, en Irlande du Nord).

#### Les performances selon les contenus mathématiques

Pour cette quatrième année du primaire, TIMSS analyse trois domaines : nombre (88 items), formes géométriques et mesures (61 items), gestion des données (26 items). Sur l'ensemble des pays ayant participé à TIMSS 2011, les élèves réussissent mieux en organisation et gestion des données (58 % en moyenne), que sur la connaissance du nombre (50 %) ou en géométrie et mesures (49 %). Pour les pays d'Europe, le taux de réussite est, respectivement, de 65 %, 51 % et 54 %.

#### Taux de réussite par domaine des mathématiques (TIMSS 2011)

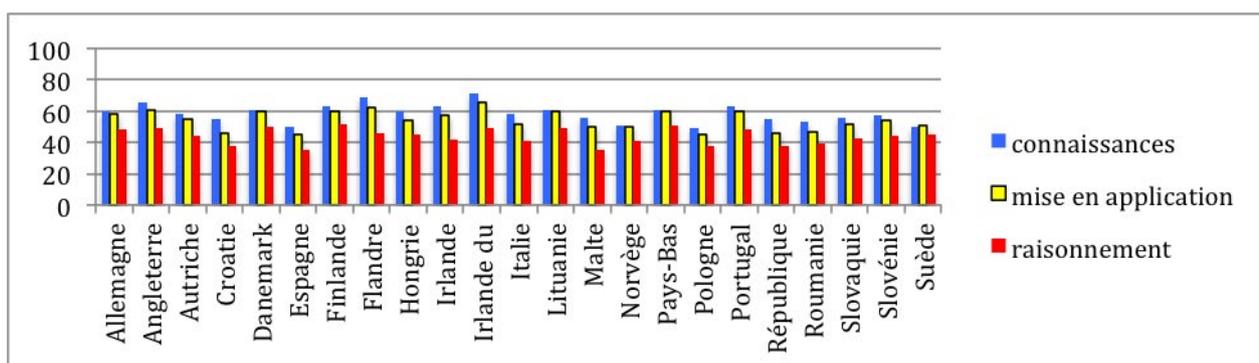


## Les domaines cognitifs des mathématiques

L'enquête TIMSS évalue également les performances cognitives des élèves, réparties entre connaissances (70 items), mise en application (71 items) et raisonnement (34 items). Les élèves performants

le sont avant tout dans l'acquisition de savoirs, moins pour les autres domaines. Si les performances sur les autres domaines se sont améliorées depuis 2007, des efforts restent à faire, notamment pour les exercices faisant appel au raisonnement, et la diversité des performances d'un pays à l'autre demeure.

### Taux de réussite par domaines cognitifs (TIMSS 2011)



Dans les épreuves PISA 2012, les éléments cognitifs (« sous-échelle de culture mathématique »), se déclinent ainsi (OCDE, 2014) :

- « pour utiliser leurs connaissances et compétences en mathématiques afin de résoudre un problème, les individus doivent souvent commencer par traduire le problème sous une forme qui se prête à un traitement mathématique. Selon les termes du cadre d'évaluation, ce processus consiste à formuler des situations de façon mathématique » ;
- « pour employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques, les élèves doivent reconnaître dans leur "boîte à outils" les éléments pertinents pour le problème tel qu'il est présenté ou qu'ils l'ont formulé, et appliquer ces connaissances d'une manière systématique et ordonnée dans leur cheminement vers la solution » ;
- « pour interpréter des résultats mathématiques, les élèves doivent établir des liens entre ces résultats et la situation dans laquelle ils s'inscrivent et ils peuvent avoir à évaluer ces résultats par rapport au problème initial ou à montrer en quoi les informations

*mathématiques qu'ils ont obtenues sont en rapport avec les éléments contextuels du problème ».*

Si plus de 50 % des élèves atteignent le niveau moyen de performance pour les trois ensembles de compétences, les élèves les plus performants le sont moins dans l'application des connaissances, alors que les élèves les moins performants globalement le sont plus pour la formulation (sans que les écarts de performance soient toutefois significatifs). Cette tendance, identique à celle des évaluations PISA dans les catégories « employer, formuler, interpréter », est le résultat d'un enseignement procédural des mathématiques mettant en avant les techniques opératoires et la mécanique mathématique.

## À LA RECHERCHE D'UNE PLUS GRANDE MAÎTRISE DES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT

En 2011, la Commission européenne publiait un rapport sur l'enseignement des mathématiques en Europe, dans lequel les auteurs mettaient en évidence l'importance de la qualité de l'enseignement et donc du savoir-faire des enseignants. On attend d'eux une bonne connaissance des principes et processus mathématiques et une formation professionnelle affûtée (EACEA, 2011).

Quelques mois plus tard étaient publiés les résultats des évaluations TIMSS qui, outre une évaluation des performances des élèves en mathématiques et en sciences, travaille à partir d'enquêtes auprès des enseignants et des élèves, étudie les curricula, manuels, modes de travail des élèves, etc. (Mullis *et al.*, 2012). En 2014, l'enquête TALIS 2013 donne « une perspective internationale sur l'enseignement et l'apprentissage » à partir d'une enquête auprès des enseignants et chefs d'établissement de 34 pays ou territoires (OCDE, 2014a).

### LES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

#### Méthodes d'enseignement et préconisations institutionnelles

Les recherches comme les études menées par les institutions internationales constatent que « *l'enseignement des mathématiques dans la scolarité de base est trop souvent un enseignement peu stimulant* » (Artigue, 2011). Il est :

- « *conçu comme un enseignement formel, centré sur l'apprentissage de techniques et la mémorisation de règles dont la raison d'être ne s'impose pas aux élèves ;*
- *dans lequel les objets mathématiques*

*sont introduits sans que l'on sache à quels besoins ils répondent, ni comment ils s'articulent avec ceux préexistants ;*

- *dans lequel les liens avec le monde réel sont faibles, généralement trop artificiels pour être convaincants, et les applications stéréotypées ;*
- *dans lequel les pratiques expérimentales, les activités de modélisation sont rares ;*
- *dans lequel une utilisation pertinente de la technologie reste encore relativement rare ;*
- *où les élèves ont peu d'autonomie dans leur travail mathématique et sont très souvent cantonnés dans des tâches de reproduction ».*

Pour autant, le rapport de la Commission européenne (EACEA, 2011) s'appuyant sur une étude du National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics ou sur celle de Hiebert et Grouws (2009) précise qu'on « *ne peut distinguer une seule meilleure méthode* » et que « *toutes les méthodes d'enseignement sont efficaces pour quelque chose* » (Swan, 2008).

Ces deux recherches ainsi que de nombreuses autres, notamment des méta-analyses, étudient les méthodes d'enseignement susceptibles de répondre aux objectifs d'apprentissages suivants :

- aisance au niveau du rappel de faits et de l'application des aptitudes acquises ;
- compréhension conceptuelle et interprétation pour les représentations ;
- stratégies d'investigation et de résolution de problèmes ;
- appréciation de l'influence des mathématiques dans la société.

Pour la compréhension des concepts, il s'agit de susciter « *les discussions autour des mathématiques, y compris l'examen des relations entre les divers domaines des mathématiques, l'interrogation sur les raisons du fonctionnement de différentes procédures, et l'examen des différences entre les différentes approches ; confier aux élèves des tâches de résolution de problèmes complexes et ouverts en mathématiques* » (Hiebert & Grouws, 2009).

Dont le Danemark, l'Espagne, l'Estonie, la Finlande, la Flandre (Belgique), la France, l'Italie, la Norvège, les Pays-Bas, la Pologne, le Portugal, la Slovaquie, la République tchèque et la Suède.



La qualité du dialogue enseignant-élève demeure néanmoins perfectible, en passant d'une situation de discours dominant de l'enseignant à un travail plus collaboratif avec les élèves, une mise en confiance de l'élève, un étayage des apprentissages par le dialogue. Ce dialogue enseignant-élève encourage les élèves à se poser des questions, explorer, écouter et aussi échanger entre pairs (Kyriacou & Issitt, 2008).

Pour développer l'efficacité des aptitudes des élèves, une « *présentation et une modélisation claires et rapides par l'enseignant, suivies d'exercices pratiques par les élèves, donnent de bons résultats* », mais ne peuvent être les seuls recours pédagogiques (Hiebert & Grouws, 2009).

D'autre part, les études permettent de mettre en avant la double nécessité d'améliorer les pratiques en classe (« *participation des élèves à une éducation coopérative* ») mais aussi la formation des enseignants pour une meilleure gestion de la classe et pour améliorer la motivation des élèves (Slavin, 2009). Les 800 analyses que Hattie a inventoriées en 2009 montrent que « *le recours au retour d'information peut avoir un effet transformateur radical en classe de mathématiques* ».

« *La plus grande différence se remarque lorsque le retour d'information comprend des données ou des recommandations pour les élèves, puis l'apprentissage assisté par les pairs, l'instruction dirigée par l'enseignant, l'instruction directe et le retour d'information concret aux parents* » (Hattie, 2009, cité par Mullis et al., 2012).

À contextes différents, effets des pratiques différents : cela suppose donc que « *former les enseignants à un éventail de méthodes différentes et leur permettre de prendre des décisions sur ce qui peut être appliqué, quand et pourquoi, est la meilleure approche pour améliorer l'enseignement* » (Mullis et al., 2012).

En Europe, l'enquête TIMSS 2011 mentionne, parmi les plus marquantes, les pratiques suivantes :

- travail individuel ou entre pairs, avec l'aide de l'enseignant (Autriche, République tchèque, Danemark, Angleterre, Finlande, Allemagne, Lituanie, Roumanie, Suède) ;
- travail en classe entière avec l'aide de l'enseignant (Croatie) ;
- travail individuel ou entre pairs, en autonomie (l'enseignant assurant d'autres tâches) ;
- mémorisation des règles, procédures et faits (Italie) ;
- explicitation des résultats par les élèves (Belgique flamande, République tchèque, Angleterre, Allemagne, Hongrie, Italie, Lituanie, Pays-Bas, Pologne, Portugal, Roumanie, Slovaquie, Slovénie, Espagne, Suède).

Dans la classe, les pratiques des enseignants pour engager les élèves dans leurs apprentissages en mathématiques participent de l'amélioration des performances. Cela peut se traduire par les activités suivantes :

- synthétiser les objectifs de la leçon ;
- relier la leçon à la vie quotidienne des élèves ;
- questionner pour obtenir des explications sur la démarche ;
- encourager les élèves à s'améliorer ;
- encourager les élèves dans l'effort ;
- apporter des matériaux intéressants en classe.

Cependant, il peut paraître paradoxal que des pays comme la Finlande (meilleure performance européenne en mathématiques) ou encore Hong-Kong (meilleure performance mondiale) n'utilisent l'ensemble de ces six pratiques retenues par l'enquête TIMSS que la moitié du temps.

En **France**, un rapport d'inspection de 2006 donne quelques indications sur les démarches pédagogiques susceptibles d'être améliorées. Trois formes d'enseignement coexistent (dans 49 % des cas) : un temps où la parole de l'enseignant domine, un temps où la priorité est donnée aux travaux individuels et un temps pour les travaux de groupes. 29 % des enseignants pratiquent

la démarche qui privilégie leur temps de parole. Une minorité d'entre eux (33 %) opèrent une différenciation selon le niveau des élèves. Les améliorations préconisées portent sur le travail de groupes, l'attention portée à l'erreur et la synthèse en fin de séance (Durpaire, 2006).

### Les ressources utilisées en classe

En **Europe**, la ressource de base pour l'enseignement des mathématiques est le manuel (pour 77 % des élèves, en moyenne), suivi par les fichiers et livres d'exercice (45 %). Les outils servant à la manipulation sont essentiellement utilisés en complément des deux précédentes ressources, de même que les TICE (voir ci-dessous). Les pays dans lesquels les élèves utilisent peu les manuels sont la Flandre (39 %), l'Angleterre (10 %) ou l'Italie (45 %, voir TIMSS 2011). En **France**, la grande majorité des enseignants se réfère à un ou plusieurs manuels et 73 % des élèves disposent d'un manuel. Le choix des manuels est peu concerté au sein de l'équipe de cycle (Durpaire, 2006).

Si la Flandre privilégie les documents et fichiers (pour 93 % des élèves), on constate que les pays d'Europe de l'Est utilisent, pour près de 50 % des élèves, un matériel et des outils spécifiques. Quant aux logiciels informatiques, leur usage est très minoritaire, pour moins de 10 % des élèves dans la plupart des pays, sauf en Angleterre et à Malte où on avoisine les 25 % d'élèves concernés. Ces données sont à mettre en comparaison avec l'usage du numérique, beaucoup plus important, même si très hétérogène selon les pays (voir ci-après).

Dans la majorité des pays européens, les méthodes d'enseignement sont prescrites ou recommandées au niveau central. Dans d'autres, les institutions se limitent à la fourniture de ressources (Allemagne, Pays-Bas). Dans d'autres encore (Italie, Hongrie, Suède, Islande), les enseignants sont libres de choisir leur(s) méthode(s) d'enseignement, même si parfois de simples indications ou objectifs peuvent influencer les pratiques (Hongrie, Suède). Dans la plupart des pays, on parle d'une approche globale, impliquant des méthodes variées.

En Allemagne, par exemple, le programme **SINUS** (*Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts*, « Accroître l'efficacité de l'enseignement des mathématiques et des sciences ») « comporte onze modules parmi lesquels les établissements et les enseignants sont libres de choisir : apprendre par la résolution de problèmes, apprendre par l'erreur, les approches interdisciplinaires, la coopération des élèves, en sont quelques exemples. Le résultat escompté est un changement efficace de méthodes d'enseignement, qui exige toutefois que tous les acteurs acceptent le processus d'innovation et l'intègrent dans leur propre enseignement » (EACEA, 2011).

### Les pratiques pertinentes

#### Qu'est-ce qu'un enseignant efficace ?

Askew et ses collègues du King's College de Londres ont travaillé sur les enseignants efficaces en numératie ●, à partir de leurs connaissances, leurs pratiques et leurs représentations (Askew *et al.*, 1997). Pour faire partie de cette catégorie « enseignants efficaces », il faut que l'amélioration des résultats des élèves de la classe soit conséquente par rapport à ceux d'une classe-contrôle. Askew *et al.* observent ● que ces enseignants ont une croyance forte de ce que signifie savoir compter, dénombrer (et sont convaincus que tous les élèves sont capables de le faire), sont conscients de l'impact de leur enseignement sur les apprentissages et de leurs stratégies d'intervention (quel type de questions poser, comment poursuivre la leçon, quelles que soient les modalités, individuelle, en groupe, en classe entière). Pour ces enseignants, les compétences en numératie supposent de savoir connecter plusieurs savoirs mathématiques et utiliser des stratégies, efficaces et efficaces. Leur enseignement doit correspondre à ces deux

Numératie :  
« connaissances et compétences requises pour gérer efficacement les exigences relatives aux notions de calcul de diverses situations ».

Les travaux publiés en 1997 portent sur un échantillon de départ de 90 enseignants « efficaces » et 2 000 élèves, répartis dans 11 écoles anglaises.



grands principes : aborder avec les élèves différentes approches mathématiques, en utilisant une diversité de mots, symboles et graphiques ; expliciter les méthodes, raisonnements et connexions pour éviter tout malentendu ; utiliser aussi bien le calcul posé, mental, électronique ; chercher à développer les habiletés mentales. Pour ce faire, il faut engager ses élèves à réfléchir, expliquer, écouter et résoudre, et s'assurer que tous les élèves s'engagent dans ces tâches, recherchent des stratégies efficaces. Des évaluations systématiques valent mieux que peu d'évaluations, portant sur le cours ●, de même qu'une pédagogie réfléchie soutenant des objectifs clairs et explicites. On verra que l'enquête TIMSS 2011 montre l'influence bénéfique de la formation continue des enseignants ou le travail coopératif des enseignants.

### Des méta-analyses pour s'en assurer ?

Dans un document de travail publié en 2014 par France Stratégie, Cusset fait le point sur les recherches portant sur les pratiques efficaces. Pour l'enseignement des mathématiques, il mentionne deux méta-analyses anglo-saxonnes, l'une est consacrée à l'enseignement des mathématiques au primaire (Slavin & Lake, 2007), l'autre s'intéresse aux élèves en difficulté en mathématiques (Gersten & Clarke, 2007).

La première synthèse s'intéresse aux interventions qui consistent à intervenir sur les contenus (13 études observées), comme changer de manuel sans modifier sa pédagogie. « L'effet moyen de ce type d'intervention

reste modeste puisqu'il est d'environ 0,10 écart-type ». Slavin et Clarke ont également repéré une autre stratégie qui consiste à utiliser l'outil informatique, dans des séances hors cours magistraux (38 études portant en grande partie sur des expérimentations) : « l'effet médian de ce type d'intervention est supérieur au précédent, puisqu'il est évalué en moyenne à 0,19 écart-type. Les effets sont, comme on peut s'y attendre, plus forts sur les tâches de calcul que sur celles relevant de la maîtrise des concepts ou de la résolution de problèmes ». Un troisième type d'intervention repose sur la modification de la pédagogie, sans changement de contenu (36 études). Les méthodes pratiquées sont l'apprentissage coopératif, l'apprentissage coopératif accompagné d'un suivi individualisé des élèves, l'instruction directe, la pédagogie de la maîtrise. Les changements peuvent s'appuyer sur une formation des enseignants centrée sur les mathématiques ou une formation des enseignants centrée sur la gestion de classe et la motivation des élèves, mais aussi l'organisation de cours supplémentaires pour les élèves : « l'effet médian pour l'ensemble des études est de +0,33 écart-type » (Cusset, 2014).

La méta-analyse de Gersten et Clarke confirme l'intérêt de l'instruction explicite et de l'apprentissage coopératif. « La verbalisation du raisonnement a également un impact très positif sur les résultats des élèves. Elle constitue un moyen, pour les élèves, de rendre explicites les stratégies mises en œuvre pour résoudre les problèmes et se rapproche ainsi de l'objectif de l'instruction explicite » (Cusset, 2014).

● Askew a souvent travaillé avec Dylan Wiliam, fervent défenseur de l'évaluation formative (Rey & Feyfant, 2014).

### Effets de certaines stratégies d'instruction pour les élèves en difficulté en mathématiques ou en éducation spécialisée (écart-type)

Stratégie d'instruction	Ampleur de l'effet pour les élèves en éducation spécialisée	Ampleur de l'effet pour les élèves en difficulté
Description visuelle et graphique des problèmes	0,50	Pas de données
Instruction systématique et explicite	1,19	0,58
Raisonnement à voix haute	0,98	Pas de données
Apprentissage coopératif entre pairs dans des groupes hétérogènes	0,42	0,62
Mise à disposition des enseignants d'évaluations formatives	0,32	0,51
Mise à disposition des élèves d'évaluations formatives	0,33	0,57

Source : P.-Y. Cusset (2014)

## Des usages et outils plus performants ?

### Travailler collectivement

L'enquête TIMSS 2011 montre qu'une attitude positive des élèves envers les mathématiques induit une plus haute performance, mais que cette attitude se détériore au fil des années, comme on peut le constater avec les résultats en 8<sup>e</sup> année de la scolarité. Dès lors, un bon environnement d'apprentissage devient fondamental. Une des composantes positives de cet environnement est le travail collaboratif entre enseignants, sous forme de :

- discussion à propos de l'enseignement d'un point particulier ;
- collaboration dans la préparation et l'organisation de matériaux d'enseignement ;
- partage de l'apprentissage issu de la pratique d'enseignement ;
- visite d'une autre classe pour en apprendre plus sur l'acte d'enseigner ;
- travail collectif pour faire ressortir de nouvelles idées.

Les élèves qui profitent le plus d'enseignants très collaboratifs (plus de 40 %) sont ceux de Slovénie, de Roumanie, de République tchèque, d'Angleterre, du Portugal, de Hongrie, de Croatie.

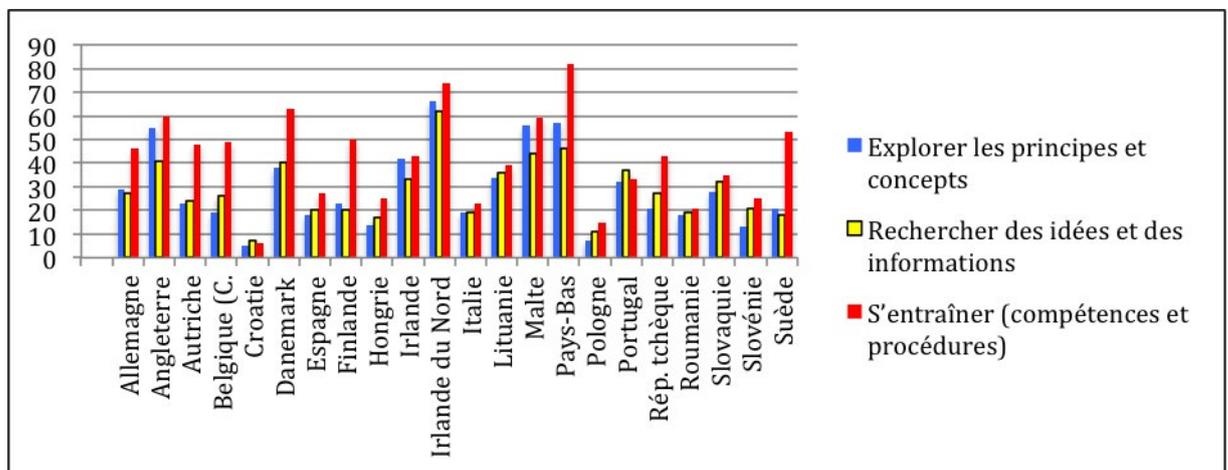
### L'usage des TICE

En 2009, les recherches ne fournissaient que peu de preuves concrètes de l'effet positif des TIC sur les apprentissages (tout au plus sur la motivation) et, par ail-

leurs, la plupart des revues de littérature sur le sujet portent sur l'enseignement secondaire (Slavin, 2009). Du point de vue des enseignants, un rapport européen de 2006, [The ICT impact report](#), « cite le manque de compétences informatiques des enseignants, un faible niveau de motivation et de confiance en soi par rapport à l'utilisation des TIC, une formation professionnelle inappropriée, l'absence ou la mauvaise qualité de l'infrastructure TIC et les problèmes liés aux systèmes scolaires traditionnels, entre autres » (EACEA, 2011). Depuis 2006, les choses ont évolué, les recommandations institutionnelles, ont été accompagnées de moyens plus importants, certains pays ont mis l'accent sur la formation des enseignants, sur l'apprentissage en ligne.

En Europe, une majorité d'élèves a accès aux TICE pour l'apprentissage des mathématiques, excepté en Croatie, en Pologne, en Roumanie, en Slovénie, en Italie ou moins de 25 % utilisent régulièrement les TICE. Elles permettent une exploration des principes et concepts ou une recherche d'information ou de compléments, mais surtout sont un moyen de tester les compétences et processus. Le rapport Eurydice 2011 *Chiffres clés de l'utilisation des TIC pour l'apprentissage et l'innovation à l'école* fait apparaître que, bien qu'encouragés à utiliser le matériel informatique et des logiciels, les enseignants « n'exploitent que très peu les possibilités » et « qu'il reste un large fossé à combler » (EACEA, 2011).

Proportion d'élèves qui utilisent régulièrement les TICE en mathématiques (TIMSS 2011)



## LA FORMATION DES ENSEIGNANTS EUROPÉENS EN MATHÉMATIQUES

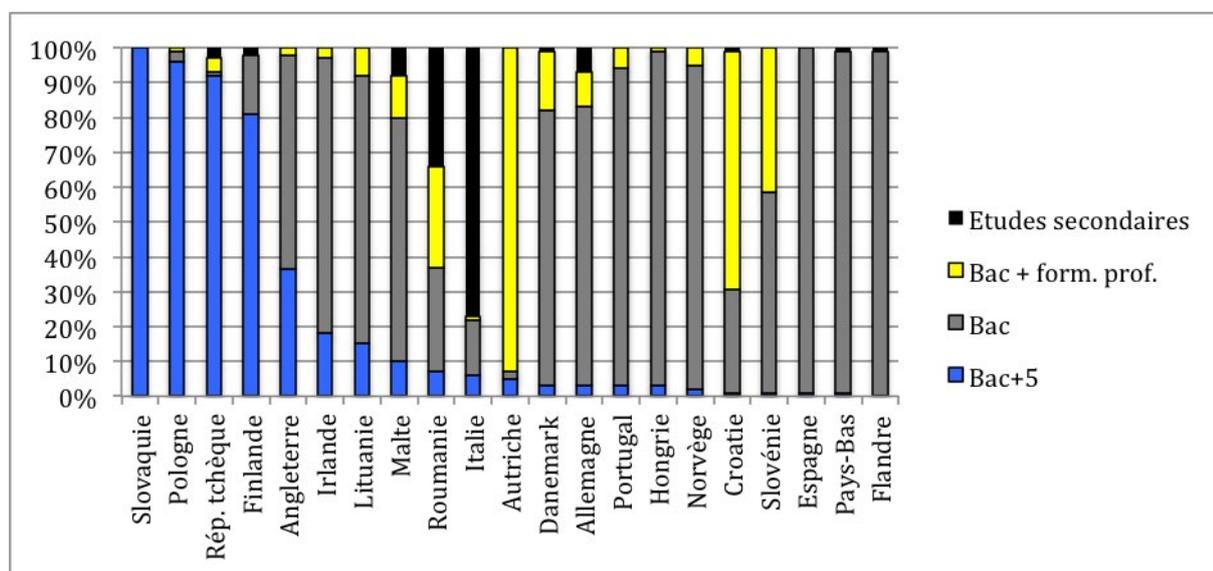
### La formation initiale

L'un des chapitres du rapport TIMSS porte sur la préparation des enseignants, données établies à partir de questionnaires administrés parallèlement aux évaluations. Pour le primaire, 22 % des élèves sont face à un enseignant ayant un diplôme universitaire de troisième cycle, 57 % ont un enseignant ayant le baccalauréat, 15 % ont un enseignant ayant terminé un cycle de for-

mation des enseignants (bac + 3) et 6 % ont des enseignants ayant validé leur fin d'études secondaires supérieures.

TALIS 2013 montre que le niveau de formation des enseignants est comparable dans le primaire et dans le deuxième cycle de l'enseignement secondaire : la grande majorité des enseignants, dans l'ensemble des pays participants, a validé un premier cycle de l'enseignement supérieur (79 % des enseignants du primaire et 91 % des enseignants du deuxième cycle du secondaire, en moyenne).

### Formation initiale des enseignants européens (1<sup>er</sup> degré)



Sur l'ensemble des pays, certains enseignants ont une double spécialisation, pour l'enseignement primaire et les mathématiques (28 % des élèves en bénéficient), alors que près de 46 % des élèves ont des enseignants ayant uniquement une formation pour le primaire.

En **France**, avant la réforme de la maitrise, 40 % des professeurs des écoles ont un diplôme de niveau « bac + 3 » ; 11 % ont un diplôme supérieur à la licence. Ils sont essentiellement diplômés en sciences de l'éducation ou en psychologie (20 %) et en lettres, histoire-géographie (27 %). Un enseignant du primaire sur cinq a suivi un cursus scientifique et la

discipline la moins présente est les mathématiques (2 %, voir Durpaire, 2006).

Globalement les performances en mathématiques pour les élèves du primaire sont meilleures si l'enseignant a une formation universitaire et une spécialisation pour le primaire, même sans « option » en mathématiques (paradoxalement, une formation en mathématiques de l'enseignant n'est pas un gage de performance des élèves). Les travaux sur les enseignants efficaces en mathématiques montrent d'ailleurs que l'efficacité n'est pas dépendante du niveau de formation initiale, et que, bien souvent, une formation en mathématiques induit des connaissances

trop compartimentés ou trop dépendantes des procédures (Askew *et al.*, 1997).

Cependant, les performances s'améliorent dès lors que l'enseignant a suivi une formation continue en mathématiques, dans les deux années précédant l'évaluation. Pour les enseignants du primaire il s'agit, à part égale (44 % et 46 %) d'une formation sur les contenus mathématiques ou la pédagogie. Les autres formations portent sur le curriculum (41 %), l'intégration des TICE en mathématiques (33 %) et l'évaluation en mathématiques (37 %).

Pour les pays européens, il est cependant difficile de faire un lien entre performances des élèves et développement professionnel des enseignants. Ainsi en Flandre (Belgique) ou en Finlande (deux meilleurs scores européens en mathématiques), les enseignants ont peu suivi de formation en mathématiques (moins de 21 %) alors qu'en Angleterre (quatrième meilleur score) les enseignants y ont fortement participé (de 30 % à 71 % selon le contenu de la formation). Des travaux de recherches montrent pourtant les effets positifs entre niveau de connaissances mathématiques de l'enseignant et niveau de performance des élèves au primaire (Hill, Rowan & Ball, 2005).

L'enquête TIMSS interroge les enseignants sur leur niveau de préparation en mathématiques (se sentent-ils bien préparés, moyennement préparés ou pas bien préparés ?). Ces données sont croisées avec les grands domaines d'enseignement en mathématiques (nombres, géométrie et mesures, traitement de données). On constate que le sentiment de confiance des enseignants n'est pas toujours en adéquation avec la performance des élèves. On trouve aussi bien des pays dans lesquels les enseignants sont confiants et les élèves moyennement performants et des pays où les enseignants sont peu confiants alors que les élèves réussissent relativement bien. Les enseignants italiens, par exemple, sont peu confiants, sur les trois domaines d'enseignement. Le décalage entre confiance et performance est notable quant à la connaissance des nombres, en Pologne,

en Espagne ou en Roumanie. Dans les pays les plus performants, il y a plutôt adéquation entre confiance et résultats, quel que soit le domaine.

Dans TALIS, les enseignants sont également interrogés sur leur sentiment de préparation à enseigner la ou les matières qu'ils enseignent, quant au contenu et à la pédagogie : « *Le sentiment, chez les enseignants, d'être bien préparés est d'autant plus fort qu'ils ont reçu une formation dans le cadre institutionnel pour toutes les matières qu'ils enseignent (par opposition à certaines, seulement, des matières qu'ils enseignent). [...] Quant à la question du contenu, les enseignants de six pays sont au moins quatre fois plus susceptibles de se déclarer préparés s'ils ont suivi une formation dans le cadre institutionnel sur le contenu de toutes les matières qu'ils enseignent que s'ils n'en ont pas bénéficié* », notamment en Bulgarie et en France. Une formation pédagogique (liée à la matière enseignée, faut-il le rappeler) est un élément important pour se sentir préparé à la pratique en classe.

En France, les professeurs des écoles débutants déclarent être insuffisamment préparés à enseigner en milieu socialement défavorisés. Butlen *et al.* (2007) expliquent ce déficit par la non-prise en compte par la formation de toutes les composantes du métier, telles que définies par Robert (composantes cognitive, médiative ●, personnelle, institutionnelle et sociale, voir Robert, 2011). La composante cognitive (organisation des savoirs, scénarios) est privilégiée au détriment des autres composantes.

### La formation continue

La démarche de formation continue « *permet aux enseignants d'apprendre des procédures, d'apprendre à apprendre et de mettre en pratique leurs connaissances pour favoriser la progression de leurs élèves* » (Avalos, 2011). « *La mission des enseignants doit être élargie pour inclure l'acquisition par les élèves de compétences à la fois cognitives et non cognitives, parmi lesquelles des modes de pensée et des méthodes de travail [...] des outils de*

Dans la composante médiative, Butlen *et al.* regroupent le discours de l'enseignant et ses actes (médiations, interactions, gestes professionnels), à propos des contenus et des comportements.



*travail [...] et des compétences relatives à la citoyenneté et à la responsabilité individuelle et sociale pour réussir dans nos sociétés modernes* » (Schleicher, 2011). Comment se situent les enseignants face à ce challenge ? C'est dans TALIS que l'on peut trouver un état des lieux de l'accompagnement des enseignants dans leur développement professionnel.

Les moyens de se former, en début de carrière et au-delà, sont multiples, souvent contraints par le manque de temps ou de moyens. Les enseignants ayant participé à TALIS indiquent comme types d'activités de formation continue : des cours ou ateliers ; des conférences ou séminaires pédagogiques ; des visites d'étude ; des activités de formation dans d'autres types d'établissements, y compris des entreprises ; des programmes de qualification (diplômants) ; des activités en réseau d'enseignants ; des recherches ; du tutorat, du *coaching* ou de l'observation collégiale intra-établissement. Mais la démarche de formation continue concerne essentiellement les enseignants du secondaire, et TALIS donne peu d'éléments relatifs aux enseignants du primaire.

**En France**, les entretiens préparatoires à la conférence de consensus CNESECO-IFÉ font apparaître que les enseignants ont été peu accompagnés lors de la réforme des programmes en 2008. Ce fut également le cas pour les programmes précédents, si l'on en juge par les commentaires de l'Inspection générale, dans son rapport de 2006. Ces remarques tiennent essentiellement au peu de temps consacré à l'enseignement des mathématiques, aussi bien en formation initiale des inspecteurs du premier degré (IEN), qui se résume parfois à des ateliers optionnels, que pour les enseignants, pour lesquels les actions académiques sont rares. « *L'enquête annuelle effectuée depuis 2002 par la DESCO sur la mise en œuvre des programmes pour l'école primaire indique que 5 % à 6 % des journées stagiaires sont consacrées aux mathématiques (tous cycles), de 32 à 36 % pour le français, 9 à 10 % pour les langues vivantes étrangères, 9 à 13 % pour les sciences et la technologie* » (Durpaire, 2006).

Pour autant, la demande de formation de la part des enseignants est faible, les enseignants disant ne pas éprouver de difficulté particulière (à plus de 55 %). Les données françaises rejoignent tendanciellement celles issues de TIMSS 2011.

Les enseignants français des écoles publiques, lors d'une enquête réalisée en 2005 (DEPP, 2006), sont satisfaits de leur formation initiale en mathématiques (60 %). Ceux qui éprouvent quelques difficultés pensent que la formation continue pourraient leur apporter de l'aide (80 %) mais peu en font la demande, selon le rapport Durpaire (2006).

### L'effet des connaissances et compétences des enseignants sur leurs pratiques

Aussi bien les enquêtes internationales (TIMSS) que les travaux de recherches sur les pratiques enseignantes qui favorisent les apprentissages montrent la diversité des connaissances des enseignants, ce que certains, dans une approche cognitive, appellent « base de connaissances » : connaissance de la matière, connaissance pédagogique des contenus, connaissance des programmes, connaissance de la pédagogie générale, connaissance des caractéristiques des élèves, contexte éducatif, objectifs de l'éducation (voir Shulman, 2007).

Des chercheurs comme Bandura ou Hanson ayant montré la corrélation entre confiance en soi des enseignants et motivation des élèves, l'enquête TIMSS a cherché à croiser les réponses précédentes avec le sentiment de compétence des enseignants sur les tâches suivantes :

- répondre aux questions des élèves en mathématiques ;
- montrer aux élèves une diversité de stratégies en résolution de problèmes ;
- proposer des tâches complexes aux élèves ayant les capacités de les résoudre ;
- adapter son enseignement pour susciter l'intérêt des élèves ;
- aider les élèves à apprécier la valeur des apprentissages mathématiques.

Les travaux d'Askew *et al.* montrent l'efficacité de ces compétences. Les points pour lesquels les enseignants européens sont les plus confiants et qui concernent 80 % à 100 % des élèves, sont les tâches « savoir répondre à ses élèves » et « stratégies en résolution de problèmes ». Cependant, les élèves italiens ont en face d'eux des enseignants bien moins confiants sur des connaissances liées aux savoirs mathématiques (savoir répondre, proposer des tâches complexes) et les élèves finlandais ou tchèques ont des enseignants moins confiants sur ces 5 points.

Différents types d'évaluation permettent de mesurer l'efficacité de la mise en œuvre du curriculum. Certaines évaluations externes permettent de mettre au jour les choix et tâtonnements des enseignants : en Lituanie, les enseignants ont très souvent du mal à « définir des objectifs clairs et mesurables et à en suivre leur progression sur tout le processus d'enseignement et d'apprentissage » (EACEA, 2011).

En 2012, l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) a publié les résultats d'une étude portant sur les politiques, pratiques et préparation pour l'enseignement des mathématiques au primaire et au collège, dans 17 pays dont l'Allemagne, l'Espagne, la Norvège, la Pologne, la Suisse. Ce qui peut être intéressant à retenir de cette étude, ce sont les quelques apports théoriques et remarques à partir des enquêtes TIMSS :

- si les curricula semblent relativement ambitieux d'un pays à l'autre, les manuels couvrent approximativement les domaines complexes du curriculum (en France, la progression des apprentissages (calendrier) n'est pas traitée à l'identique, d'un manuel à l'autre) ;
- en 1995 et 1999, des vidéos ont été effectuées dans les cadre de TIMSS. Les observateurs (sur un panel réduit de pays) ont considéré que les cours dispensés étaient de qualité moyenne au Japon ; majoritairement de mauvaise qualité et aucun n'était de haute qualité aux États-Unis ; se répartissaient par tiers entre mauvaise, moyenne et

bonne qualité en Allemagne (on retiendra qu'en Allemagne, à la suite du « choc Pisa », les performances des élèves se sont améliorées).

Pour illustrer ces liens entre connaissances et pratiques, Clivaz (2011, 2012) reprend les travaux de Ma (1999) et compare les situations analysées par Ma aux États-Unis et en Chine à quelques écoles vaudoises. Les panels d'enseignants sont composés, pour les États-Unis, de 23 enseignants, considérés comme « au-dessus de la moyenne » et intéressés par l'enseignement des mathématiques ; pour la Chine, ce sont 72 enseignants, répartis dans trois écoles de la région de Shanghai de niveaux de performance différents ; dans le canton de Vaud, il s'agit de 16 enseignants de deux écoles urbaine et péri-urbaine. À chaque enseignant, il a été posé trois questions, dont une en géométrie que nous ne reprendrons pas ici. La première portait sur des soustractions avec retenues, la deuxième sur la multiplication de nombres à plusieurs chiffres. Pour la soustraction, la plupart des enseignants ont déclaré avoir débuté par ce qu'ils souhaitaient que leurs élèves apprennent. Pour les enseignants états-uniens, il s'agit très majoritairement (83 %) de la technique de calcul et ils l'expriment sous forme d'un « emprunt » au groupement d'ordre supérieur. Les enseignants chinois en revanche privilégient la compréhension, en axant leurs explications sur la décomposition de l'entité supérieure (51 %), voire en donnant plusieurs décompositions (35 %), comme par exemple pour  $53 - 26 = 53 - (20 + 3 + 3) = 53 - 20 - 3 - 3 = 50 - 20 - 3 = 47 - 20 = 27$ . Les enseignants vaudois interrogés se situent à mi-chemin : 55 % d'entre eux privilégient la technique et l'illustrent par l'idée d'emprunt ; 45 % mettent en avant la compréhension en parlant de décomposition. Au-delà des exemples proposés, on observe, chez les enseignants américains et vaudois, une bonne approche de la résolution de problèmes mais un manque de construction de séquences d'enseignement, une « difficulté à faire ressortir les connaissances mathématiques enchâssées dans la tâche » (Clivaz, 2012).



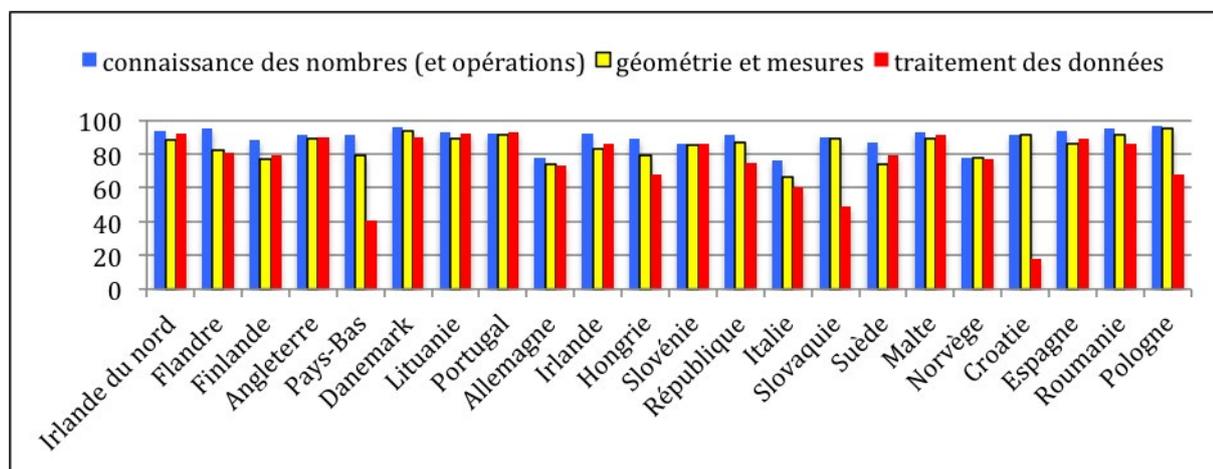
Au-delà de cet exemple très concret sur l'incidence des connaissances (et croyances) des enseignants sur leurs savoirs mathématiques, les didacticiens se sont emparés du contrat didactique pour analyser la corrélation entre réussite des élèves et connaissances du type « concepts et connexions » chez les enseignants. Chambris (2012) a analysé la résolution de quelques exercices réalisés en CM2, du point de vue des élèves et de l'enseignant.

Un des exemples étudiés par Chambris : « On demande à des élèves de 5<sup>e</sup> année de primaire (CM2) de réaliser l'exercice suivant : pour faire les photocopies de l'école, il faut 8 564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ? ». Cet exercice peut faire appel à deux techniques : numération et conversion de milliers en centaines. Pour les élèves ayant répondu 86 (20 %) ou 85 (20 %), 10 % n'adoptent pas de technique visible, 18 % passent par une division, 11 % par une multiplication et 2 % s'approchent du nombre 80. On constate que les enseignants, de leur côté, ne perçoivent pas l'exercice

comme un problème de numération mais comme un problème de division (paquets de 100 feuilles). Pour Chambris, la faible présence de 80 dans les réponses relève de la technique de numération (plus rare), qui sollicite la relation entre milliers et centaines. Or cette technique de conversion « repose sur le discours de relation entre unités qui existe mais est peu sollicité dans la praxéologie dominante ».

Plus généralement, le rapport de l'IGEN de 2006 montre que les enseignants connaissent les programmes, mais uniquement dans les grandes lignes. Parmi les six domaines du programme de 2002 (exploitation de données numériques, connaissances des nombres entiers naturels, connaissances des nombres fractions et des nombres décimaux, calcul, espace et géométrie, grandeurs et mesures), ils n'en citent (schématiquement) que quatre : les problèmes, les nombres, la géométrie et les mesures. « Le champ le moins souvent cité est l'exploitation de données numériques qui est d'ailleurs interprété fréquemment comme résoudre des problèmes » (Durpaire, 2006).

### Sentiment de compétences des enseignants (TIMSS 2011)



Pour Askew (2008), le manque de connaissances mathématiques chez certains enseignants du primaire les conduit à s'appuyer beaucoup trop sur les manuels scolaires, comme « partenaires de substitution ». Les recherches sur les manuels scolaires, en France, montrent qu'un usage « à la carte » des manuels et fichiers peut induire des ruptures dans

la progression des apprentissages. Pour éviter ce mésusage, Askew suggère un travail plus collaboratif entre enseignants, pour les assurer et les rassurer dans leur enseignement des mathématiques.

À la question de savoir si les enseignants font le lien entre vie courante et mathématiques, les enseignants disent partir du

concret pour aller vers plus d'abstraction (34 %) ou bien utiliser l'un et l'autre (49 %), mais 60 % ne donnent pas ou peu de problèmes issus de la vie courante ou de la vie de la classe (71 %). Ces problèmes et leur résolution sont à la fois centraux dans les programmes et complexes pour les enseignants. Pour Durpaire, il conviendrait de préciser la nécessité d'envisager des problèmes à une opération, des problèmes avec étapes intermédiaires explicites, avec étapes intermédiaires trouvées par l'élève et des problèmes plus complexes. Une différenciation pédagogique devrait permettre de ne pas négliger la catégorie la plus simple, au bénéfice des élèves qui peuvent s'avérer perdus.

Pour l'enseignement du calcul, si 60 % des enseignants disent y consacrer une à deux heures par semaine, il s'agit beaucoup plus de calcul posé que de calcul mental et Durpaire regrette la faible place consacrée au calcul réfléchi, pour apprendre à calculer intelligemment et pas uniquement mécaniquement.

## L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES N'EST PAS QU'UNE AFFAIRE DE MATHÉMATIENS

Si chacun est interpellé par les résultats des évaluations, et si de nombreux experts de l'enseignement des mathématiques confrontent leur analyse pour

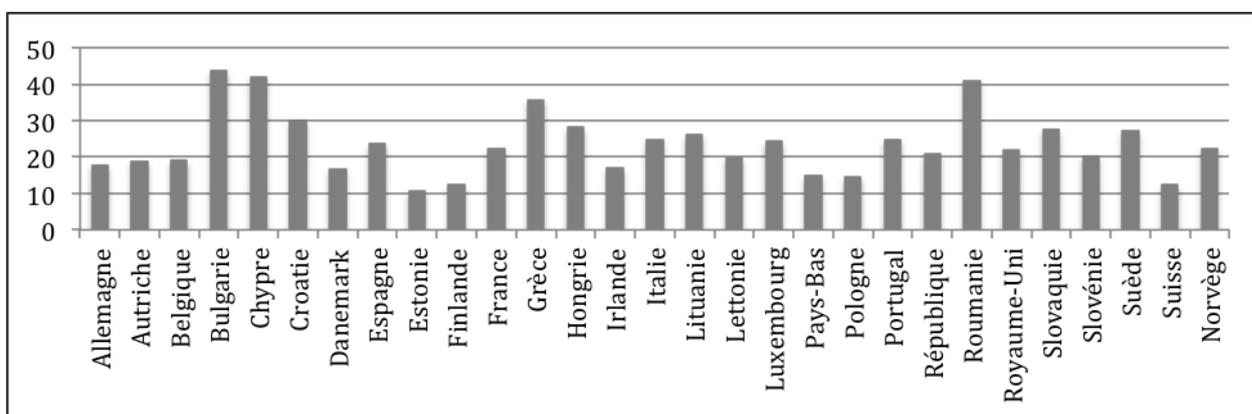
améliorer la situation, il s'avère également opportun de prendre du recul et de considérer la place des mathématiques dans le curriculum.

En fin de compte, les mathématiques, est-ce bien utile ? La question paraîtra sans doute impertinente, mais il arrive que, face aux difficultés rencontrées par les élèves, on questionne l'usage des mathématiques et notamment l'utilité d'un curriculum « trop techniciste ». Pour certains, savoir ses tables de multiplication, savoir faire les quatre opérations, et ce le plus tôt possible dans sa scolarité fait partie des fondamentaux, comme une sorte de mécanique bien huilée. Les approches sociologiques et psychologiques viennent toutefois remettre en question la simplicité apparente de cette mécanique...

## DES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES QUI NE SONT PAS QUE MATHÉMATIQUES

Les évaluations PISA 2012, TIMSS 2011 ou encore, pour la France, CEDRE 2015, indiquent l'ampleur des difficultés à surmonter (pour les enseignants et les élèves).

Proportion d'élèves moins performants (PISA 2012)



## Entre anxiété et phobie, la peur des mathématiques engendre de mauvais résultats

PISA 2012 montre qu'anxiété et moindres résultats en mathématiques vont de pair ●, sauf pour les pays d'Asie, les plus performants mais où l'anxiété est importante. C'est ainsi que 59 % des élèves s'inquiètent parce qu'ils pensent qu'ils auront des difficultés en cours de mathématiques ; 33 % sont très tendus quand ils ont un devoir de mathématiques à faire ; 31 % deviennent très nerveux quand ils travaillent à des problèmes de mathématiques ; 30 % se sentent perdus quand ils essaient de résoudre un problème de mathématiques ; et 61 % s'inquiètent à l'idée d'avoir de mauvaises notes en mathématiques.

Cette anxiété est encore plus importante chez les filles que chez les garçons et la comparaison avec les autres élèves accroît ce sentiment d'anxiété, d'incompétence, de mésestime de soi. « Dans certains systèmes d'éducation, la réussite des élèves se mesure en fonction de leur capacité à faire mieux que leurs pairs, l'éducation apparaissant alors comme un jeu à somme nulle » (OCDE, 2015). En Allemagne, en Autriche, en France, en Italie, au Liechtenstein, aux Pays-Bas, en République tchèque et en Slovénie ●, les élèves qui fréquentent un établissement où l'élève moyen obtient de meilleurs résultats qu'eux sont plus anxieux que les élèves de même niveau qui fréquentent un établissement où l'élève moyen obtient des résultats similaires ou inférieurs aux leurs.

### Le rôle de la mémoire de travail et du langage

De nombreux travaux ont cherché à comprendre le développement cognitif des élèves, afin de prévenir au plus tôt des difficultés ultérieures dans les apprentissages mathématiques. Il s'agit à la fois de comprendre comment se développent les compétences individuelles et quels sont les facteurs qui influent sur ce développement, qu'ils soient mathématiques ou non mathématiques.

On peut distinguer deux types de compétences mathématiques, formelles et non formelles. Les mathématiques formelles comprennent les compétences et concepts qui sont enseignés à l'école et qui passent par une notation abstraite des nombres, la connaissance du système en base dix, les décimaux, etc. ; des connaissances mathématiques informelles s'acquièrent avant ou en dehors du cadre scolaire strict (Purpura & Ganley, 2014). Il existe deux domaines non formels spécifiques pour lesquels tout déficit a un impact fort sur les apprentissages mathématiques à venir : le langage et la mémoire de travail.

La mémoire de travail est la capacité à garder des informations en mémoire tout en utilisant simultanément d'autres informations. Les élèves qui ont des difficultés en mathématiques, au primaire, sont souvent moins performants sur des tâches faisant appel à la mémoire de travail et on peut même dire que cette défaillance est prédictive de difficultés au secondaire (Nunes et al., 2012). Pour autant, la mémoire de travail n'interagit pas dans toutes les étapes du processus d'apprentissage mathématique. On s'aperçoit que si la mémoire de travail peut être significative dans certaines résolutions de problèmes (et les tâches cognitives complexes), elle l'est moins pour des exercices plus procéduraux. Elle est significative dès le plus jeune âge, intervenant dans les aspects spécifiques des mathématiques informelles. Les compétences plus complexes comprennent la connaissance des nombres cardinaux, la « subitisation » ●, la comparaison de suites, l'ordre des nombres et les problèmes à énoncés, ces derniers nécessitant de comprendre des concepts linguistiques (ou terminologiques) tels que « plus » et « moins », par exemple. Afin de vérifier le caractère prédictif de la mémoire de travail sur les cinq compétences énoncées plus haut, Purpura et Ganley (2014) ont réalisé une recherche dans 45 écoles publiques ou privées, avec 199 élèves de maternelle et de début d'école élémentaire, issus de famille à faibles ou moyens revenus. Il résulte de ce travail que la mémoire de travail a été prédictive sur trois domaines, la cardinalité, la comparaison de suites et l'ordre

« En moyenne, dans les pays de l'OCDE, l'anxiété vis-à-vis des mathématiques est associée à une baisse de 34 points de score de la performance dans cette matière – soit l'équivalent de près d'une année de scolarité » (OCDE, 2015).

Ces 8 pays font partie des 10 pays où les élèves sont les plus affectés par leur performance relative, les deux autres pays étant le Canada et le Japon.

Subitizing : Capacité à percevoir une quantité très rapidement sans passer par le dénombrement.

des nombres et, de manière plus marginale, sur la « subitisation ». Le langage est un fort prédicteur pour l'ensemble des compétences et concepts à l'exception du comptage verbal, du comptage un-à-un et de la « subitisation ».

## LA DIDACTIQUE EST-ELLE SOLUBLE DANS LA PSYCHOLOGIE ?

Vergnaud, en 1989 (et sans doute avant) affirme que « *c'est actuellement un enjeu scientifique de très grande importance que d'étudier les processus de transmission et d'appropriation des connaissances mathématiques comme un domaine scientifique propre, qui n'est réductible ni à la psychologie, ni aux mathématiques, ni à aucune science. Cela ne signifie pas pour autant que la didactique des mathématiques soit indépendante des idées venant des autres sciences bien au contraire* » (Vergnaud, 1989, cité par Crahay, 2013).

La part des recherches en psychologie pour expliciter les difficultés des élèves dans leurs apprentissages premiers en mathématiques n'est pas négligeable. Crahay, reprenant les travaux de Maury (2001), souhaite montrer que la didactique des mathématiques se réfère, implicitement ou non, à des théories psychologiques, et cite la psychologie cognitive chez Julo ●, les représentations sémiotiques chez Duval ou encore la théorie opératoire chez Piaget. Pour Crahay, seule la théorie de la transposition didactique de Chevallard échappe au champ de la psychologie : « *ne cherchant ni à comprendre comment l'élève s'approprie des savoirs enseignés et moins encore à préciser comment il convient de procéder pour que les apprentissages s'opèrent de façon optimale, il est logique que la théorie de la transposition didactique puisse se décliner sans assertion quant à la psychologie des sujets qui apprennent* » (Crahay 2013). En continuant la lecture des théories didactiques par Crahay, nous rencontrons la théorie des situations didactiques ● de Brousseau.

Brousseau distingue deux types de situations : les situations mathématiques, sans intervention didactique et les situations didactiques « *qui comprennent une situation mathématique, enchâssée dans un système de conditions qui ne conduisent le sujet à l'adoption directe des comportements déterminés que par l'intervention du professeur, que l'élève en aperçoive ou non la nécessité mathématique* » (Brousseau 2011). Crahay y voit une véritable théorie de l'apprentissage, car l'élève apprend par des adaptations spontanées à l'évolution de la situation didactique, avec ou sans intervention de l'enseignant ●, mais le chercheur réfute certaines affirmations de Brousseau. À propos du caractère spontané de l'adaptation et du guidage minimal de l'élève dans une situation didactique, Crahay observe un défaut de preuve que « ça marche » ●. D'autre part, il évoque une contradiction entre le postulat, chez Brousseau, de l'existence de situations fondamentales, « *qui ont une valeur universelle [et déterminent] les connaissances mathématiques* », et l'épistémologie constructiviste (assimilation des situations par l'élève selon les schèmes dont il dispose lorsqu'il entre en interaction avec ces situations).

Un autre débat s'engage, à distance, entre Brousseau et Crahay. Le premier écrit que « *la didactique des mathématiques emprunte naturellement beaucoup à divers domaines comme l'anthropologie, la sociologie, la psychologie évidemment, à la linguistique etc.* » (Brousseau, 2011) mais que la psychologie ne peut être utilisée comme base scientifique principale de l'enseignement sous peine d'engager les pratiques didactiques dans des « voies incontrôlées ». Contre ce risque, la théorie des situations devient dès lors, pour la didactique, un « puissant instrument de contrôle » de l'importation de certains concepts, de réductions disciplinaires, ou encore qu'à chaque connaissance mathématique correspond une situation didactique qui la caractérise (Brousseau, 2003 ; cité par Crahay, 2013). Crahay réfute une vision désincarnée, fonctionnaliste d'une didactique des mathématiques basée sur le principe que les connaissances proviennent de l'action, et de l'action seule. Pour les mêmes raisons, il reproche à Piaget de faire de la « psychologie épistémologique » qui mettrait à l'écart l'environnement social de l'enfant.

Approche de type « *ergonomie cognitive* » dont la caractéristique « *est de chercher à prendre en compte le mieux possible les relations entre une tâche donnée... et le fonctionnement cognitif induit par cette tâche* » (Julo, 1995, cité par Maury, 2001).

« *Une théorie des situations mathématiques modélise les conditions sous lesquelles les êtres humains produisent, communiquent et apprennent les connaissances que nous reconnaissons comme mathématiques* » (Brousseau, 2011).

Crahay en réfère alors à Piaget (l'intelligence est une forme d'adaptation biologique) et Dewey (*learning by doing*).

On retrouve ici les débats sur les pratiques efficaces et les expérimentations basées sur les données probantes (Feyfant, 2011a).



Dans l'apprentissage des mathématiques, qui pourrait paraître relativement peu dépendant du contexte social dans lequel se situe l'élève (utiliser le terme de technique opératoire pour l'addition, ou apprendre par cœur ses tables de multiplication semble assurer une neutralité fonctionnaliste), se pose la question de donner du sens aux problèmes mathématiques posés, comme réponse aux difficultés des élèves.

L'apprentissage des mathématiques suppose une multiplicité de compétences : compréhension des concepts, habileté procédurale, compétence stratégique, raisonnement mathématique et orientation mathématique (Kilpatrick *et al.*, 2001). C'est aussi ce que disent De Corte et Verschaffel (2008), dans leur présentation d'un modèle conceptuel « susceptible de guider la conception de dispositifs pédagogiques en vue du développement d'une disposition à mathématiser le réel ». Ce modèle se compose de quatre « facettes » : une théorie de la compétence (buts de l'apprentissage des mathématiques) ; une théorie de l'apprentissage (comprendre et expliquer le processus d'apprentissage et de développement) ; une théorie de l'intervention (définir un environnement d'apprentissage stimulant : stratégies d'enseignement, pratiques éducatives) ; une théorie de l'évaluation (piloter et améliorer les apprentissages).

### L'exemple de la résolution de problème : une démarche cognitive

La résolution de problèmes est l'activité dans laquelle les élèves rencontrent le plus de difficultés. Les recherches tentent de comprendre les enjeux, les leviers et les contraintes, selon différentes approches : les recherches en psychologie étudient les processus cognitifs qui sous-tendent la résolution de problèmes, alors que celles en didactique ou en sciences de l'éducation se préoccupent de « la formulation et [du] contexte de présentation des problèmes, [de] l'impact qu'ils ont sur les performances et les progrès des élèves ». Elles pointent toutes sur l'importance de la compétence mathématique, une approche qui ne doit rien aux choix actuels liés à un socle commun de compétences,

de connaissances et de culture et plus généralement d'une approche par compétence, puisque présente dans les travaux de recherche depuis plus de 25 ans, selon De Corte et Verschaffel (2008).

« Les recherches conduites depuis deux décennies ont confirmé que l'une des difficultés essentielles des activités de résolutions de problèmes arithmétiques réside non pas, ou en tout cas pas exclusivement ou principalement, dans le traitement des opérations, même si elles ont une certaine importance, mais dans la compréhension/interprétation des énoncés et dans la mise en relation du résultat de cette compréhension avec les procédures de résolution » (Fayol & Thévenot, 2005).

D'un point de vue institutionnel, les processus de résolution de problèmes « devraient être la source et le support principal de l'apprentissage des mathématiques pendant tout le primaire » selon le ministère de l'Éducation espagnol, par exemple, et font partie des principes fondamentaux de la plupart des curricula nationaux (Mullis *et al.*, 2012). Processus plutôt étudiés pour la huitième année de scolarité (collège) dans l'enquête TIMSS 2007, la résolution de problèmes n'apparaît pas dans l'analyse des données 2013. On peut néanmoins retenir les résultats des enquêtes TIMSS et PISA, pour les élèves plus âgés que ceux qui nous concernent, car les pratiques du primaire conditionnent celles du secondaire.

Ainsi au secondaire, la proportion d'élèves à qui il est demandé d'appliquer « des faits, concepts et procédures » dans plus de la moitié des cours varie de 39 % en Norvège à 81 % en Bulgarie. TIMSS différencie ces problèmes d'avec ceux pour lesquels la solution n'est pas immédiatement évidente, et dont la résolution est une pratique moins courante (23 % des élèves, en moyenne, voir Mullis *et al.*, 2012). Les difficultés des élèves en réso-

lution de problèmes tiennent à la complexité et à l'interactivité des compétences qu'ils doivent mettre en œuvre. Corrélativement, les enseignants ne sont guère mieux armés pour comprendre les mécanismes cognitifs (et métacognitifs) en jeu.

Pour De Corte et Verschaffel (2008), les élèves « *doivent développer une démarche mentale qui requiert la maîtrise coordonnée de cinq catégories d'outils cognitifs* » :

- une base de connaissances spécifiques (certains utilisent la notion de connaissances disciplinaires). Ces connaissances, accessibles et organisées de façon cohérente et flexible, doivent intégrer les faits, symboles, algorithmes, concepts, et règles « *qui constituent la table des matières des mathématiques en tant que discipline* » ;
- des stratégies de recherche en situation de problèmes. Elles augmentent significativement la probabilité de trouver une solution correcte, car elles induisent une approche systématique de la tâche ;
- des connaissances métacognitives : savoir observer, savoir être attentif, savoir gérer ses émotions, savoir utiliser ses systèmes de mémoire, savoir raisonner, savoir comprendre et apprendre ;
- des stratégies d'autorégulation (cognitive, motivationnelle ou conative ●). Elles impliquent l'intégration de stratégies portant sur les processus cognitifs (autorégulation cognitive) et d'autres portant sur les processus conatifs (autorégulation motivationnelle ou conative). « *Il existe quatre stratégies majeures d'autorégulation cognitive : la détermination du but, la planification, le contrôle et l'ajustement* » (Focant & Grégoire, 2008, cités par Crahay *et al.*, 2008) ;
- des croyances associées aux mathématiques. Parmi ces croyances, il faut distinguer trois catégories : les croyances au sujet de soi-même en lien avec l'apprentissage et à la résolution de problèmes mathématiques ; les croyances à propos du contexte social dans lequel les activités mathé-

matiques prennent place et, enfin, les croyances au sujet des mathématiques elles-mêmes ainsi que celles relatives à la résolution de problèmes et à l'apprentissage mathématique.

On peut ajouter ce que Focant et Grégoire (2008) nomment les connaissances métacognitives, qui concernent les capacités du sujet, les caractéristiques des tâches et la validité des stratégies.

### Contextualiser les apprentissages

Des recherches multidisciplinaires montrent l'importance de la modification du contexte d'apprentissage sur l'acquisition des apprentissages. De Corte & Verschaffel ont mené une expérience avec des élèves de CM2 en Belgique néerlandophone. Cette recherche fait suite aux changements curriculaires adoptés par le Parlement flamand à la fin des années 1990, accompagnés de recommandations insistant sur « *l'importance du raisonnement mathématique, de la capacité à résoudre des problèmes et de l'applicabilité des savoirs mathématiques aux situations de la vie réelle* » (De Corte & Verschaffel, 2008). Le but du projet de recherche visait à concevoir et évaluer un dispositif stimulant le processus d'apprentissage approprié à ces objectifs. Le contexte d'apprentissage a été « radicalement modifié » dans les classes expérimentales, dans quatre directions :

- centrer l'environnement d'apprentissage sur l'acquisition par les élèves d'une stratégie métacognitive globale pour la résolution de problèmes : construire une représentation mentale du problème, décider comment résoudre le problème, faire les calculs nécessaires, interpréter les résultats et formuler une réponse, évaluer la réponse. Cela suppose de prendre conscience de chacune de ces étapes (stimuler la réflexivité) ; d'être capable de superviser et évaluer ses actions au cours de ces étapes (stimuler l'autorégulation) ;
- utiliser une série variée de problèmes ouverts et complexes, que les auteurs qualifient « prudemment » de réalistes,

● Conative : qui se rapporte à la volonté d'apprendre (concept d'effort).



voire authentiques, présentés sous des formats très divers (articles de journaux, bande dessinée, tableau, etc.) ;

- utiliser des techniques pédagogiques variées, selon un modèle basé sur l'enchaînement de séquences d'activités suivantes : courte introduction faite en classe entière ; deux sessions de problèmes à résoudre, en petits groupes hétérogènes ; discussion en classe entière ; tâche individuelle suivie d'une discussion en classe entière. L'enseignant apporte aide et stimulation, lesquelles s'amenuisent au fur et à mesure que les élèves prennent conscience de leur activité de résolution de problèmes. « *Plusieurs des principes pédagogiques sont ici mis en jeu : stimulation d'un apprentissage actif et constructif, création d'opportunités pour la collaboration, développement de l'autorégulation de l'apprentissage en prenant en compte les différences individuelles* » (De Corte & Verschaffel, 2008) ;
- créer une nouvelle culture de classe, développer des attitudes et croyances positives par rapport aux mathématiques et à la résolution de problèmes ; « *discuter de ce qu'est un bon problème, une bonne réponse et une bonne procédure de résolution (par ex. "il y a souvent différentes façons de résoudre un problème" ; "pour plusieurs problèmes, une bonne estimation est une meilleure réponse qu'un nombre exact")* » (De Corte & Verschaffel, 2008) ; reconsidérer le rôle du professeur et des élèves dans la classe de mathématiques.

Le dispositif a été testé sur une période de 10 semaines et s'est traduit par une série de 20 leçons. Les élèves ont été évalués à trois reprises (pré-test, post-test, test de rétention). On note un effet positif sur les résultats aux tests, mais aussi sur le plaisir et la persévérance des élèves, sur leur croyance et attitudes vis-à-vis des mathématiques. Par ailleurs, la focalisation sur la résolution de problèmes ne réduit pas les résultats pour les apprentissages plus traditionnels.

## L'APPROCHE SOCIALE DES MATHÉMATIQUES

Les recherches en didactique ou en psychologie ne permettent pas de donner des réponses à tous les problèmes auxquels sont confrontés les élèves, les enseignants, les parents. Les difficultés des élèves ne sont pas uniquement du domaine de la cognition ou de la performance individuelle, mais, pour certains chercheurs, doivent être étudiées à l'aune de la structuration et de la place de l'école (et des mathématiques) dans la société.

### Théorie sociale et mathématiques

Pais et Valero ont dirigé un numéro spécial de la revue *Educational Studies in Mathematics*, « Théorie sociale et recherche sur la formation en mathématiques », rassemblant à la fois théorie bourdieusienne de la reproduction sociale et de la ségrégation (Jorgensen *et al.*, 2014), mais aussi la critique du poids des évaluations internationales comme déterminant de ce que devrait être un bon enseignement des mathématiques (Tsatsaroni & Evans, 2014) ou encore l'interrogation sur les croyances partagées sur la qualité de la formation des enseignants en mathématiques (Parker & Adler, 2014). Ils y suggèrent, *a contrario* des recherches qui rejettent l'eau sale du bain constituée par les pressions politiques, sociétales et économiques pour ne penser que « mathématiques » (le « bébé sain »), de jeter un regard critique sur cette eau sale (et jeter dans un premier temps le bébé sans l'eau du bain). Ces courants de recherches, qualifiés par Pais et Valero d'ethno-mathématiques ou d'éducation mathématique critique (*critical mathematics education*), envisagent l'éducation en mathématiques dans une perspective sociale, culturelle et politique. Certains montrent l'utilisation des mathématiques à des fins de sélection (les performants) et corrélativement d'exclusion (les désavantagés), la mise en place d'un processus de reddition de compte, voire d'un diktat sur les comportements et modes de pensée des enfants. La survvalorisation des mathématiques dans les discours est justifiée par une utilisation des mathématiques dans les activités quo-

tidiennes et légitimée par la référence à l'acquisition de connaissances et compétences, masquant le rôle de reproduction des inégalités en vue d'atteindre une position sociale élevée (Pais & Valero, 2014). Pour Jorgensen *et al.* (2014), les mathématiques occupent une place unique dans le curriculum scolaire dans tous les pays : normes de langage particulières, enseignement lourdement structuré, ensemble de compétences organisées hiérarchiquement et souvent déconnectées de la mise en application. De plus, le *background* culturel des enfants issus de milieux favorisés facilite l'apprentissage des mathématiques, notamment par l'usage d'un répertoire linguistique, partagé par la classe moyenne et les enseignants.

### Le langage, encore une fois

On a vu combien le langage était important pour la numératie. Au-delà d'un vocabulaire mathématique, du codage et d'une symbolique propre à ces apprentissages, le langage n'est en aucune manière une capacité qui tiendrait de l'inné mais bien d'un patrimoine construit dans le cadre familial élargi. « *L'apprentissage des mathématiques à l'école est un exemple marquant de la relation entre patrimoine social et réussite scolaire [... et] l'affrontement entre la culture de l'école et la culture des apprenants contribue de manière significative à l'échec ou au succès de nombreux apprenants* » (Jorgensen *et al.*, 2014).

Les élèves qui peuvent bénéficier dans le cadre familial de pratiques discursives (habitus linguistique) peuvent le remobiliser dans le cadre scolaire, notamment lors de tâches nécessitant des processus de questionnement ou d'articulation. Jorgensen *et al.* évoquent la situation des élèves au Royaume-Uni ou en Australie où les élèves sont confrontés à des problèmes nouveaux pour lesquels ils ont besoin d'un répertoire de compétences leur permettant de trouver un intérêt dans la tâche à accomplir. Ils évoquent deux groupes d'élèves, l'un qui a toutes les clés du langage et du fonctionnement de l'enseignement (et de l'apprentissage) des mathématiques, l'autre composés d'élèves à la fois moins « formatés », plus déten-

us, qui peuvent comprendre en partie les questions à traiter mais manquent de confiance (« *Je crois comprendre mais je ne suis pas sûr* », c'est le *low-ability group*). Les élèves ayant un moindre bagage linguistique (mathématique) ont des difficultés à expliciter clairement les résultats obtenus.

Face à ce constat, les enseignants cherchent à adapter leur enseignement à ce groupe, par un langage moins complexe, des questions fermées et facilement compréhensibles, des exercices se déroulant étape par étape, des explications ne nécessitant pas de clarification dès lors qu'il semble que l'élève a compris. En conséquence, les élèves n'ont pas l'opportunité de développer leurs compétences linguistiques, ce qui risque d'affecter durablement leurs performances, mais aussi la compréhension de ce que c'est que de « faire des maths ». Bien souvent les enseignants baissent les bras, considérant que les élèves ne correspondent pas à leur idéal-type, ne possèdent pas la structuration mathématique attendue et ne sont pas capables d'un raisonnement mathématique plus poussé.

On retrouve, dans les éléments de discussion des recherches, la nécessité de former les enseignants pour leur faire appréhender les différences sociales entre élèves, théoriser le manque de concordance entre le travail réel des élèves et leurs attentes. On y retrouve aussi une critique du décalage entre les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées en formation initiale des enseignants.

### Données sociologiques

Les recherches établissent le poids important du milieu familial sur la réussite scolaire (Feyfant, 2011b). Si l'enquête TIMSS 2011 ne fait pas apparaître une corrélation automatique entre milieu défavorisé et performances médiocres, les 9 % d'élèves qui bénéficient de peu de ressources culturelles (dont les livres) à la maison ont des performances moyennes inférieures (436 au lieu de 555). De même les élèves qui ne parlent pas la langue de scolarisation dans leur foyer voient leurs



performances réduites, dans une moindre mesure (477 au lieu de 501). Les attentes parentales sur la scolarisation de leurs enfants impactent également les résultats aux tests. Plus longues sont les études envisagées, plus hautes sont les performances (gain de 18 % des performances).

L'enquête CEDRE 2014 montre que les performances des élèves sont de plus en plus liées à l'origine sociale, aussi bien en fin de primaire qu'en fin de collège. D'autres facteurs, déclinés par les recherches sur la réussite scolaire ou les difficultés des élèves de milieu défavorisé, se retrouvent encore dans TIMSS 2011 (ou les précédentes versions) : scolarisation précoce (+10 %), valorisation des mathématiques par les chefs d'établissement, les enseignants, les parents, les élèves (+6 % en moyenne), environnement sécurisé de l'école (+6 %), climat scolaire serein (+10 %), harcèlement (6 %).

En France, une majorité des élèves en grande difficulté en fin de primaire (selon les enquêtes nationales) entre donc au collège sans avoir les bases nécessaires

pour aborder des savoirs et compétences plus élaborés. Il convient de travailler sur les facteurs aggravant les difficultés en mathématiques, liés à l'origine sociale, mais aussi d'envisager en analysant point par point, domaine mathématique par domaine mathématique, les éclairages des évaluations (parfois contestables) qui dressent un tableau des compétences acquises ou non pendant ou en fin d'enseignement primaire. En dehors de troubles précis et plus graves, que l'école ne peut gérer seule, cela suppose une pédagogie adaptée mais pas moins ambitieuse, une connaissance fine des processus d'apprentissages mathématiques par les enseignants.

Ce bref état des lieux évoque la nécessité d'une réflexion interdisciplinaire, entre didactique, sociologie, psychologie, etc., d'une préparation plus soutenue des futurs professeurs des écoles mais aussi d'un accompagnement des enseignants dans leur pratique quotidienne.

## BIBLIOGRAPHIE

- Andreu Sandra, Le Cam Marion & Rocher Thierry (2014). « Évolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés ». *Note d'information de la DEPP*, n° 19, mai.
- Artigue Michèle (2011). *Le défi de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Paris : UNESCO.
- Arzoumanian Philippe & Dalibard Étienne (2015) « CEDRE 2014 – Mathématiques en fin de collège : une augmentation importante du pourcentage d'élèves de faible niveau ». *Note d'information de la DEPP*, n° 19, mai.
- Askew Mike (2008). « Mathematical discipline knowledge requirements for prospective primary teachers, and the structure and teaching approaches of programs designed to develop that knowledge ». In Sullivan Peter & Wood Terry (dir.). *The international handbook of mathematics teacher education : knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam : Sens publishers, p. 13-35.
- Askew Mike, Brown Margaret, Rhodes Valerie, William Dylan & Johnson David (1997). *Effective Teachers of Numeracy: Report of a study carried out for the Teacher Training Agency*. Londres : King's College, University of London.
- Barrouillet Pierre & Camos Valérie (2003). « Savoirs et savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences ». In Kail Michèle & Fayol Michel (dir.). *Les sciences cognitives et l'école*. Paris : PUF, p. 307-351.
- Brousseau Guy (2011). « La théorie des situations didactiques en mathématiques », *Éducation et didactique*, vol. 5, n° 1, p. 101-104.
- Butlen Denis, Charles-Pézarid Monique, Masselot Pascale & Sayac Nathalie (2007). *De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement en mathématiques de professeurs des écoles nouvellement nommés dans des écoles de milieux défavorisés (ZEP/REP)*. Rapport de recherche, vol. 1. Paris : IREM.
- Chambris Christine (2012). « Étude des conditions pour favoriser les connexions entre les connaissances : une approche écologique ». *Actes EMF 2012*. Genève : Université de Genève.
- Clivaz Stéphane (2011). *Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse en sciences de l'éducation, Université de Genève.
- Clivaz Stéphane (2012). « Des mathématiques pour enseigner : une comparaison entre enseignants états-uniens, chinois et vaudois ». *Maths-École*, n° 218, février, p. 1-13.
- Crahay Marcel (2008). « La difficulté d'articuler diverses procédures arithmétiques dans les problèmes complexes ». In Crahay Marcel et al. (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck, p. 177-199.
- Crahay Marcel (2013). « Nécessité et insuffisance d'une psychologie de l'apprentissage pour enseigner les mathématiques ». *Éducation & Formation*, e-298-01, p. 11-21.
- Cusset Pierre-Yves (2014). *Les pratiques pédagogiques efficaces : conclusions de recherches récentes*. Paris : France Stratégie.
- Dalibard Étienne & Pastor Jean-Marc (2015). « CEDRE 2014 – Mathématiques en fin d'école primaire : les élèves qui arrivent au collège ont des niveaux très hétérogènes ». *Note d'information de la DEPP*, n° 18, mai.
- De Corte Erik & Verschaffel Lieven (2008) « Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants ». In Crahay Marcel et al. (dir.). *Enseignement et apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck, p. 25-54.
- DEPP (2006). « Les enseignants des écoles publiques et la formation ». *Les Dossiers – enseignants et personnels de l'éducation*, n° 176, août.
- Durpaire Jean-Louis (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. Rapport de l'Inspection générale de l'éducation nationale*. Paris : ministère de l'Éducation nationale.



- Duval Raymond (2006). « Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques ». In COPIRELEM, *Actes du 32<sup>e</sup> colloque sur la Formation des Maîtres*. Paris : Arpeme, p. 67–89.
- EACEA (2011). *L'enseignement des mathématiques en Europe : défis communs et politiques nationales*. Bruxelles : Eurydice.
- Fayol Michel (2013). *L'acquisition du nombre*. Paris : Presses universitaires de France (Que sais-je ?, 3941).
- Fayol Michel & Thevenot Catherine (2005). « Résolution de problème/résolution de problèmes arithmétiques ». In Noël Marie-Pascale (dir.). *Approche neuropsychologique et développementale des difficultés de calcul chez l'enfant*. Paris : Solal, p. 193-221.
- Feyfant Annie (2011a). « Les effets des pratiques pédagogiques sur les apprentissages ». *Dossier d'actualité Veille et Analyses*, n° 65, septembre. Lyon : ENS de Lyon.
- Feyfant Annie (2011b). « Les effets de l'éducation familiale sur la réussite scolaire ». *Dossier d'actualité Veille et Analyse*, n° 63, juin. Lyon : ENS de Lyon.
- Focant Jérôme & Grégoire Jacques (2008). « Les stratégies d'autorégulation cognitive : une aide à la résolution de problèmes arithmétiques ». In Crahay Marcel et al. (dir.). *Enseignement et apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck, p. 201-221.
- Gersten Russell & Clarke Benjamin (2007). *Effective strategies for teaching students with difficulties in mathematics*. Reston : National Council of Teachers of Mathematics.
- Hattie John (2009). *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. Londres : Routledge.
- Hiebert James & Grouws Douglas (2009). « Which teaching methods are most effective for maths? » *Better: Evidence-based Education*, vol. 2, n° 1, p. 10-11.
- Hill Heather C., Rowan Brian & Ball Deborah L. (2005). « Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement ». *American Educational Research Journal*, vol. 42, n° 2, p. 371-406.
- Jorgensen Robyn, Gates Peter & Roper Vanessa (2014). « Structural exclusion through school mathematics: Using Bourdieu to understand mathematics as a social practice ». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 87, n° 2, p. 221-239.
- Julot Jean (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : PUR.
- Kilpatrick, Jeremy, Swafford Jane & Findell Bradford (dir.) (2001). « Adding it up: Helping children learn mathematics ». Mathematics Learning Study Committee, National Research Council. Conclusions and recommendations. Washington : The National Academies Press.
- Kyriacou Chris & Issitt John (2008). *What Characterises Effective Teacher-Initiated Pupil Dialogue to Promote Conceptual Understanding in Mathematics Lessons in England in Key Stages 2 and 3 (Report No. 1604T)*. Londres : EPPI-Centre ; University of London, Institute of Education, Social Science Research Unit.
- Ma Liping (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates.
- Maury Sylvette (2001). « Didactique des mathématiques. et psychologie cognitive : un regard comparatif sur trois approches psychologiques ». *Revue française de pédagogie*, n° 137, p. 7-14.
- Mégard Marie (coord.) (2012). *Les évaluations nationales et internationales sur les acquis des élèves et sur d'autres dimensions des systèmes éducatifs*. Rapport de l'Inspection générale de l'Éducation nationale, n° 2012-056. France : Ministère de l'éducation nationale ; IGEN.
- Mullis Ina V.S., Martin Michael O., Foy Pierre & Arora Alka (2012). *TIMSS 2011 : international results in mathematics*. Amsterdam : IEA.

- Nunes Terezinha, Bryant Peter, Barros Rossana & Sylva Kathy (2012). « The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement ». *British Journal of Educational Psychology*, n° 82, p. 136-156.
- OCDE (2014a). *Résultats de TALIS 2013 : Une perspective internationale sur l'enseignement et l'apprentissage*. Paris : OCDE.
- OCDE (2014b). *Résultats du PISA 2012 : Savoirs et savoir-faire des élèves : Performance des élèves en mathématiques, en compréhension de l'écrit et en sciences* (vol. I). Paris : OCDE.
- OCDE (2015). « Plus de peur que de maths ». *PISA à la loupe*, n° 48, février.
- Pais Alexandre & Valero Paola (2014). « Whither social theory? ». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 87, n° 2, p. 241-248.
- Parker Diane & Adler Jill (2014). « Sociological tools in the study of knowledge and practice in mathematics teacher education ». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 87, n° 2, p. 203-219.
- Purpura David J. & Ganley Colleen M. (2014). « Working memory and language: Skill-specific or domain-general relations to mathematics? » *Journal of Experimental Child Psychology*, vol. 122, p. 104-121.
- Rey Olivier & Feyfant Annie (2014). « Évaluer pour (mieux) faire apprendre ». *Dossier de Veille de l'IFÉ*, n° 94, septembre. Lyon : ENS de Lyon.
- Robert Aline (2001). « Recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant ». *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 21, n° 1-2, p. 57-80.
- Schleicher Andreas (2011). *Building a High-Quality Teaching Profession: Lessons from around the World*. Paris : OCDE.
- Slavin Robert (2009). « What works in teaching maths? » *Better: Evidence-based Education*, vol. 2, n° 1, p. 4-5.
- Swan Malcom (dir.) (2008). *Mathematics Matters : Final Report*. Sheffield : National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics.
- Tsatsaroni Anna & Evans Jeff (2014). « Adult numeracy and the totally pedagogised society: PIAAC and other international surveys in the contexte of global educational policy on lifelong learning ». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 87, n° 2, p. 167-186.





▶ **Pour citer ce dossier :**

Feyfant Annie (2015). *L'apprentissage des nombres et opérations : les données du problème*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 102, juin. Lyon : ENS de Lyon.

En ligne : <http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=102&lang=fr>

▶ **Retrouvez les derniers Dossiers de veille de l'IFÉ :**

● Gausse Marie (2015). *Lire pour apprendre, lire pour comprendre*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 101, mai. Lyon : ENS de Lyon.

En ligne : <http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=101&lang=fr>

● Reverdy Catherine (2015). *Éduquer au-delà des frontières disciplinaires*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 100, mars. Lyon : ENS de Lyon.

En ligne : <http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=100&lang=fr>

● Thibert Rémi (2015). *Voie professionnelle, alternance, apprentissage : quelles articulations ?* Dossier de veille de l'IFÉ, n° 99, février. Lyon : ENS de Lyon.

En ligne : <http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=99&lang=fr>

▶ **Abonnez-vous aux Dossiers de veille de l'IFÉ :**

<http://ife.ens-lyon.fr/vst/abonnement.php>

© École normale supérieure de Lyon  
Institut français de l'Éducation  
Veille et Analyses

15 parvis René-Descartes BP 7000 – 69342 Lyon cedex 07  
[veille.scientifique@ens-lyon.fr](mailto:veille.scientifique@ens-lyon.fr)  
Standard : +33 (04) 26 73 11 24  
ISSN 2272-0774